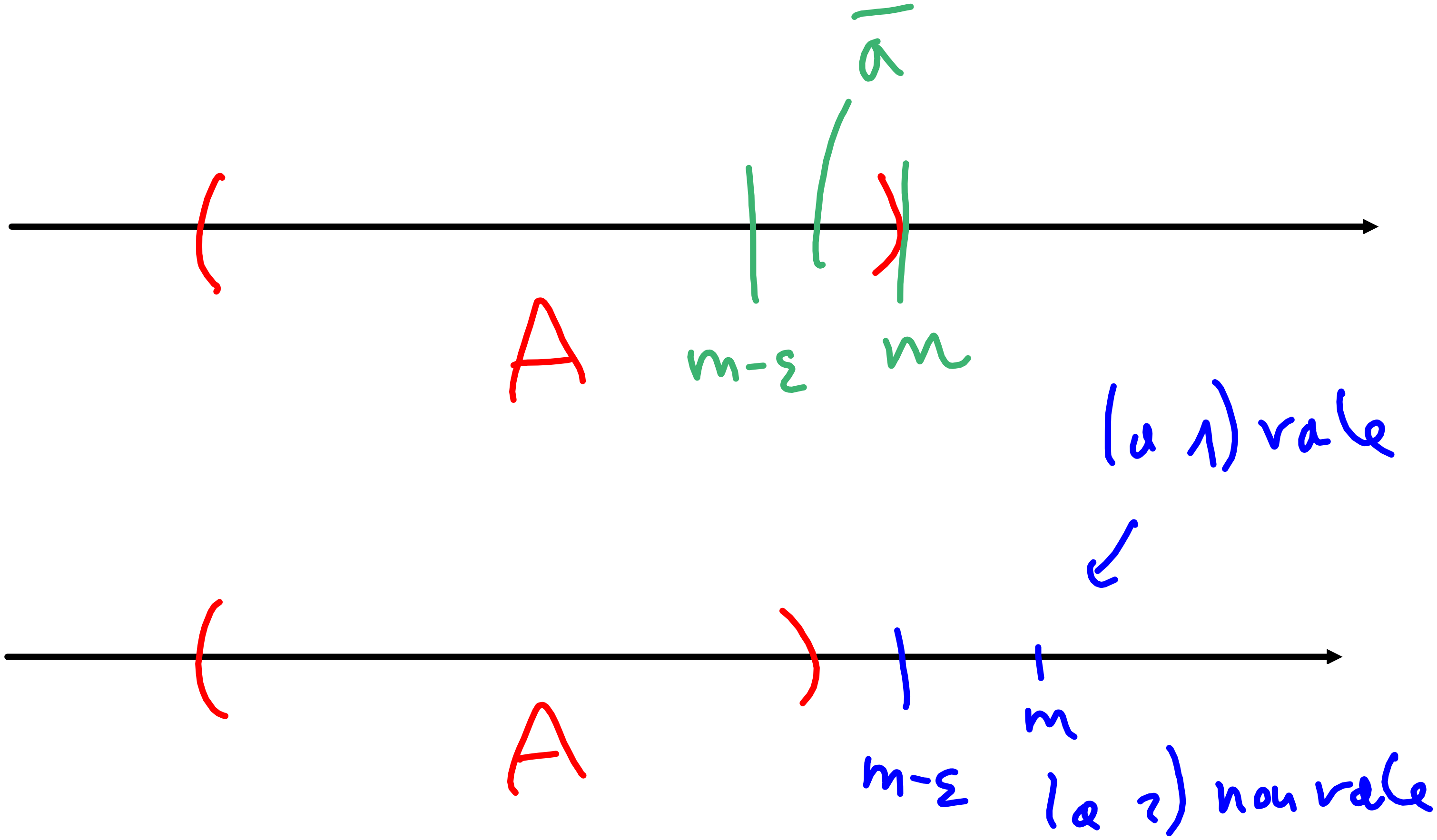
Def.: Se A non è superiormente limitato scriviamo $\sup(A) = +\infty$

Oss: $A \neq \emptyset$ superiorm. limitato. $m = \sup(A)$ se e solo se valgono

1) $a \leq m \quad \forall a \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{a} \in A$ t.c.

$$\bar{a} > m - \varepsilon$$



$\bar{a}$
A
$m-\varepsilon$
m
(a 1) vale
A
$m-\varepsilon$
m
(a 2) non vale

Retta reale estesa

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

in modo che valga

$$-\infty \leq x \leq +\infty \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}$$

quindi se $x \in \mathbb{R}$

$$-\infty < x < +\infty$$

Es: La scrittura

$\sup(A) < +\infty$ vuol dire che A è superiorm. limitato.

Operazioni con $\pm\infty$.

1) Se $x \neq +\infty$ allora

$$x + (-\infty) = -\infty$$

2) Se $x \neq -\infty$ allora

$$x + (+\infty) = +\infty$$

3) Se $x > 0$ allora

$$x \cdot (+\infty) = +\infty$$

e $x \cdot (-\infty) = -\infty$

4) se $x < 0$ allora

$$x(-\infty) = +\infty$$

$$x(+\infty) = -\infty$$

Operazioni vietate

$$(+\infty)+(-\infty)=?$$

$$0\cdot(+\infty)=?$$

$$0\cdot(-\infty)=?$$

Operazioni valide

$$(+\infty)(+\infty)=+\infty$$

$$(+\infty)(-\infty)=-\infty$$

$$(-\infty)(-\infty) = +\infty$$

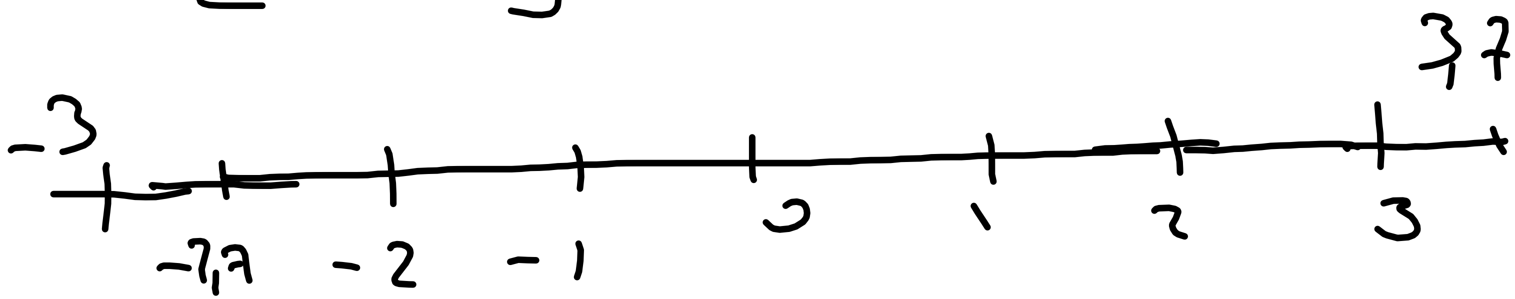
Oss: Dato $A \subset \mathbb{Z}$ se
A è superiormente limitato
allora A ha massimo, se
è inferiormente limitato
ha minimo.

Def: Dato $x \in \mathbb{R}$ si dice parte intera di x

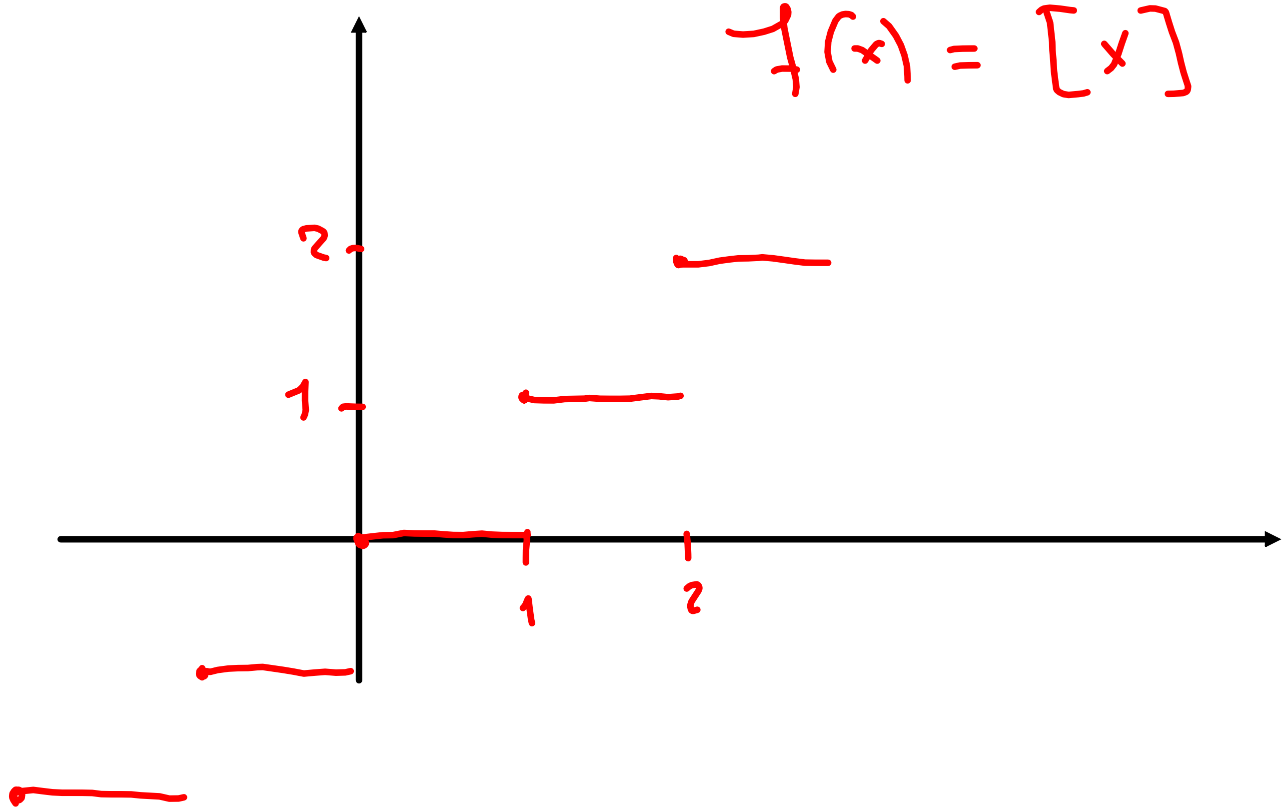
$$[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$$

$$\left[37/10\right] = 3$$

$$\left[-27/10\right] = -3$$



$f(x) = [x]$



Def: $A \subset \mathbb{R}$ $\quad f : A \to \mathbb{R}$

a) f si dice limitata sup. se $f(A)$ è limitato sup.
(limit. inf, limitata).

b) f ha massimo se $f(A)$ ha massimo. M è il max di f se $M = \max(f(A))$.
lo stesso per $\min(f)$.

c) $\sup(f) = \sup(f(A))$.

se f non è limitata superiorm.

si scrive $\sup(f) = +\infty$

inf - - - -

d) Se f ha massimo ogni $x_0 \in A$ t.c. $f(x_0) = \max(f)$

si dice punto di massimo per f.

Oss: Il massimo di f è unico, il punto di massimo potrebbe non esserlo.

Es: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sin x$

$\max(f) = 1$ $\qquad f(A) = [-1, 1]$

$A = \mathbb{R}$

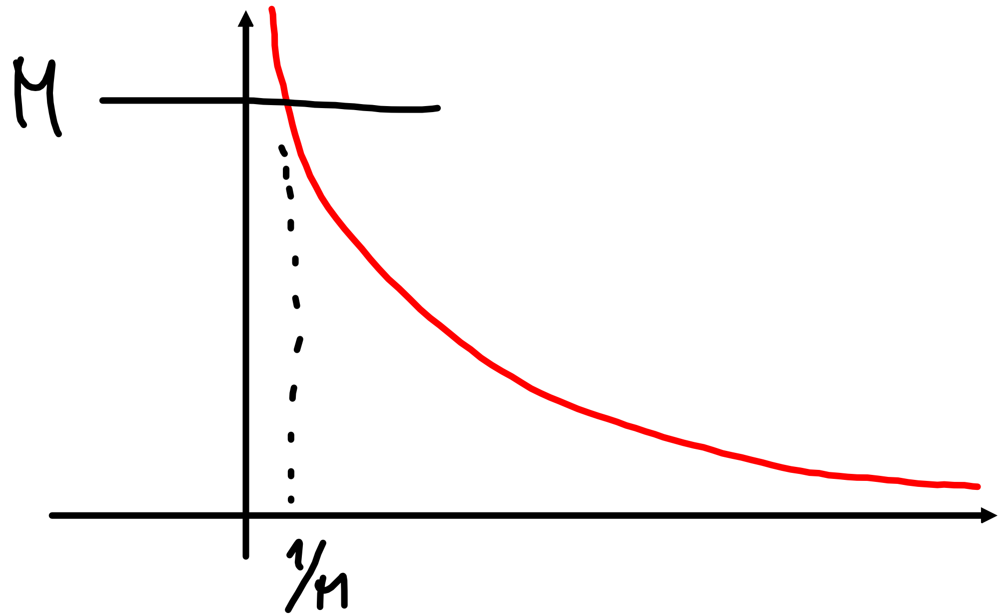
$x_0 = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo

$x_1 = \frac{5}{2}\pi$ è punto di massimo

$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ è punto di massimo.

Es: $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x}$



$\sup(f) = +\infty$

$\inf(f) = 0$

f non ha né max né min

Oss: $A \subset \mathbb{R}$ $\quad f: A \to \mathbb{R}$

a) Se A ha max e f è deb. crescente $\Rightarrow$ f ha max e

$$\max(f) = f(\max(A))$$

b) Se A ha minimo e f è deb. cresente $\Rightarrow$ f ha minimo e

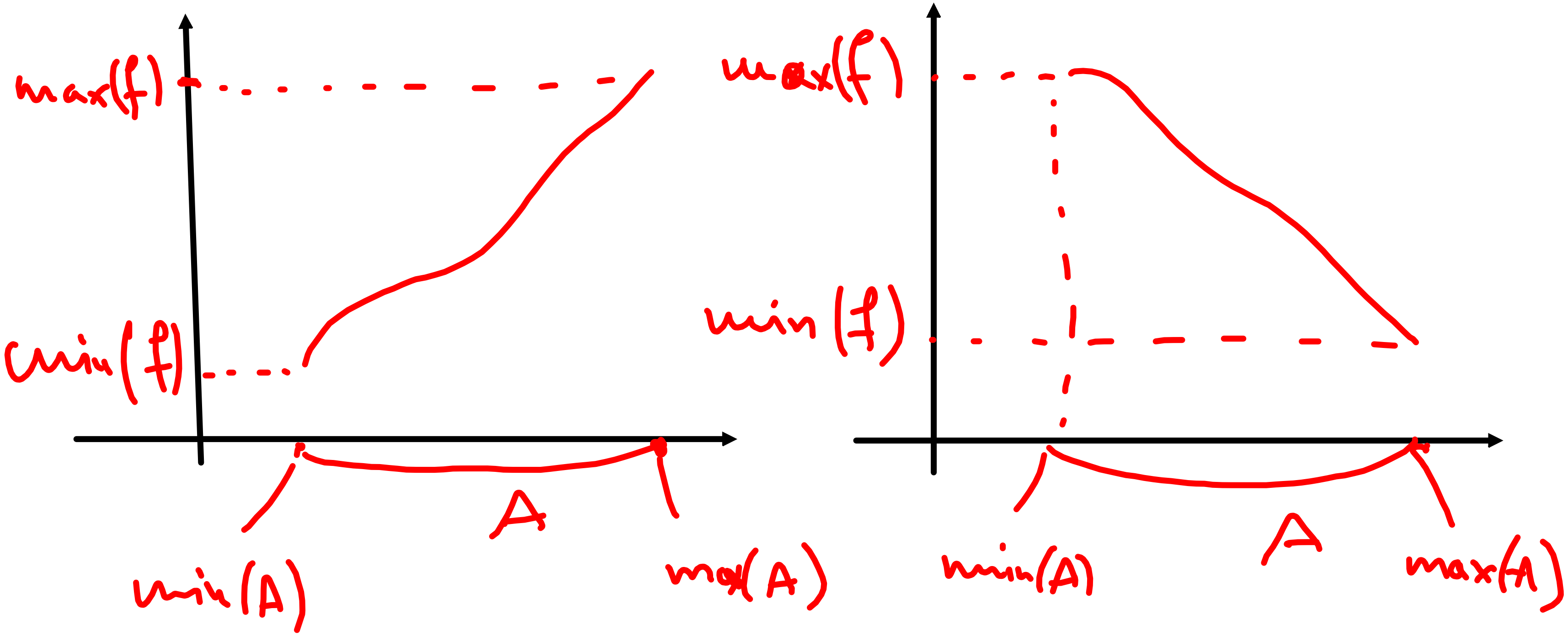
$$\min(f) = f(\min(A))$$

c) Se A ha max e f è debolm. decrescente $\Rightarrow$ f ha minimo e

$$\min(f) = f(\max(A))$$

d) Se A ha min e f è debolm. decrescente $\Rightarrow$ f ha max e

$$\max(f) = f(\min(A)).$$


max(f)
min(f)
A
min(A)
max(A)
max(f)
min(f)
A
min(A)
max(A)

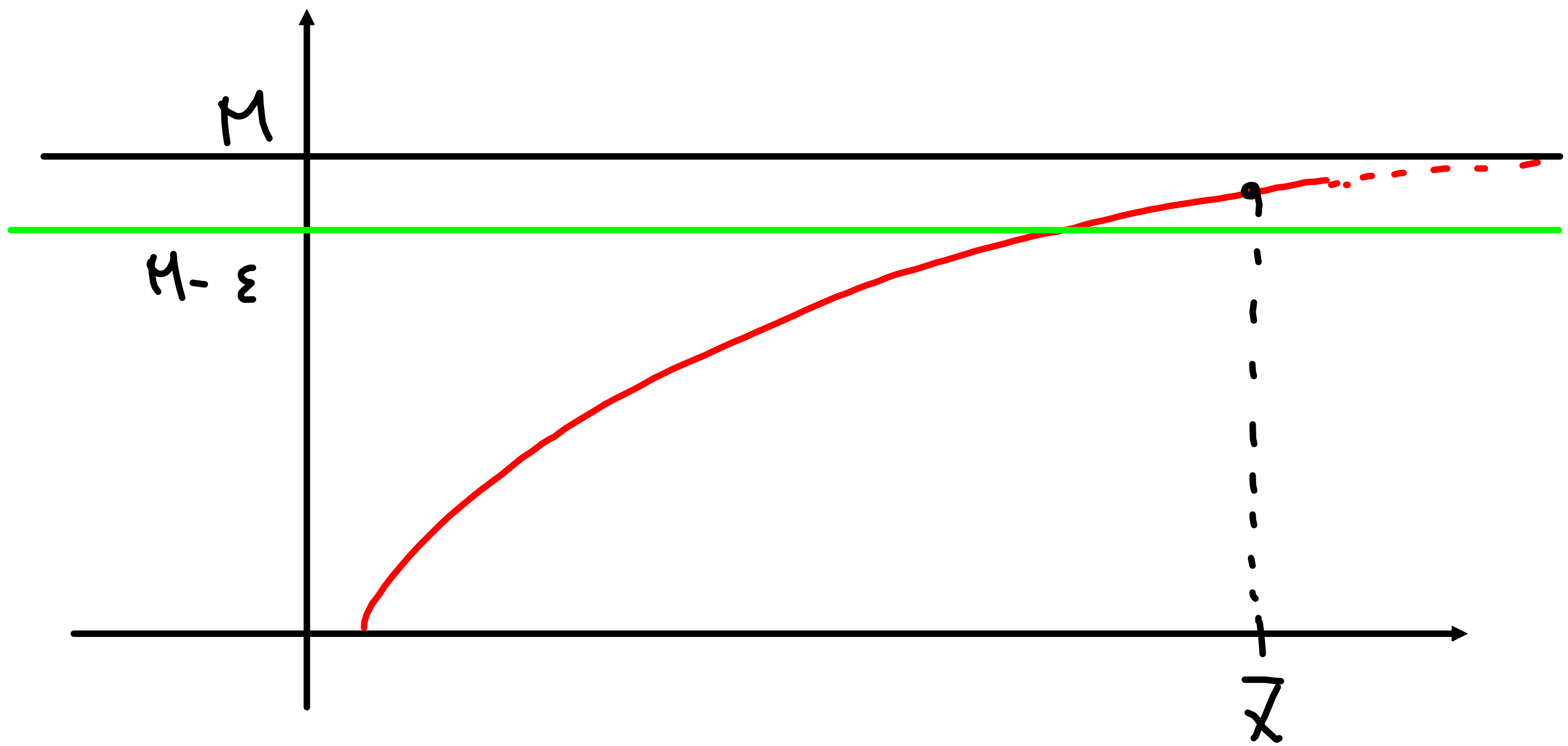
Oss: $f : A \to \mathbb{R}$

$M = \sup(f)$ se e solo se valgono

1) $f(x) \leq M \quad \forall x \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \bar{x} \in A$ t.c.

$$f(\bar{x}) > M - \varepsilon$$



M
M- ε

Valore assoluto

Def: $\forall x \in \mathbb{R}$ si dica valore assoluto di x

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

Proprietà

1) $x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $|x| = x$ se $x \geq 0$

$|x| = -x$ se $x \leq 0$

3) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4) $|x| = 0 \iff x = 0$

5) $|-x| = |x|$

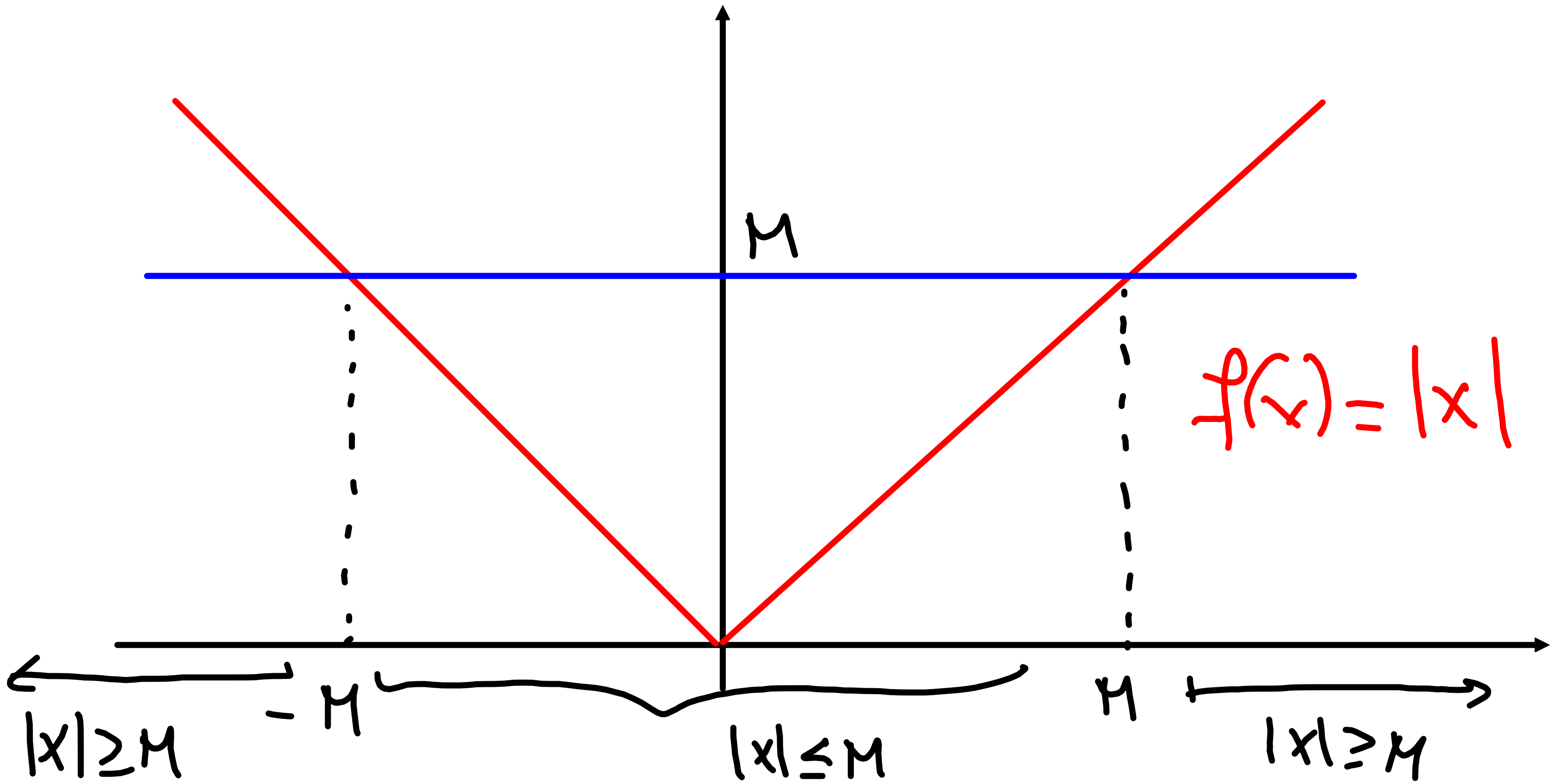
6) $-|x| \leq x \leq |x|$

7) $|x| \leq M$ se e solo se

$$-M \leq X \leq M$$

8) $|x| \geq M$ se e solo se

$X \geq M$ oppure $X \leq -M$



$$|x| \geq M \iff x \in (-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$$

$$M \geq 0$$

Se $M < 0$

$|x| \geq M$? $x \in \mathbb{R}$

$|x| < -3$ $\emptyset$

Disugnaglianza triangolare

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ risulta

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$||a| - |b|| \leq |a-b|$$

Oss: $|a+b+c| \leq |a+b| + |c|$

$\leq |a| + |b| + |c|$

Def: L'insieme di definizione di una funzione è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dove le operazioni descritte in f hanno senso.

Es: L'insieme di definizione di $f(x) = \sqrt{x}$ è $[0, +\infty)$

Es: $\log x$

è definita in $(0,+\infty)$

Es: $\log(2x)$ in $(0,+\infty)$

Es: $\log(x^2)$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Es: $2\log x$ in $(0,+\infty)$

$$\log(x^2) = 2\log x \quad \forall x>0$$

se $x < 0 \Rightarrow -x > 0$

$$\log(x^2) = \log\left((-x)^2\right)$$

$$= 2\log(-x)$$

$$\log(x^2) = 2\log|x| \quad \forall x \neq 0 .$$

$$\log(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\log x} = x \quad \forall x > 0$$

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in [-1,1]$$

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$$

$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\pi/2, \pi/2\right]$$

$$\arcsin(\sin x) = \, ?$$

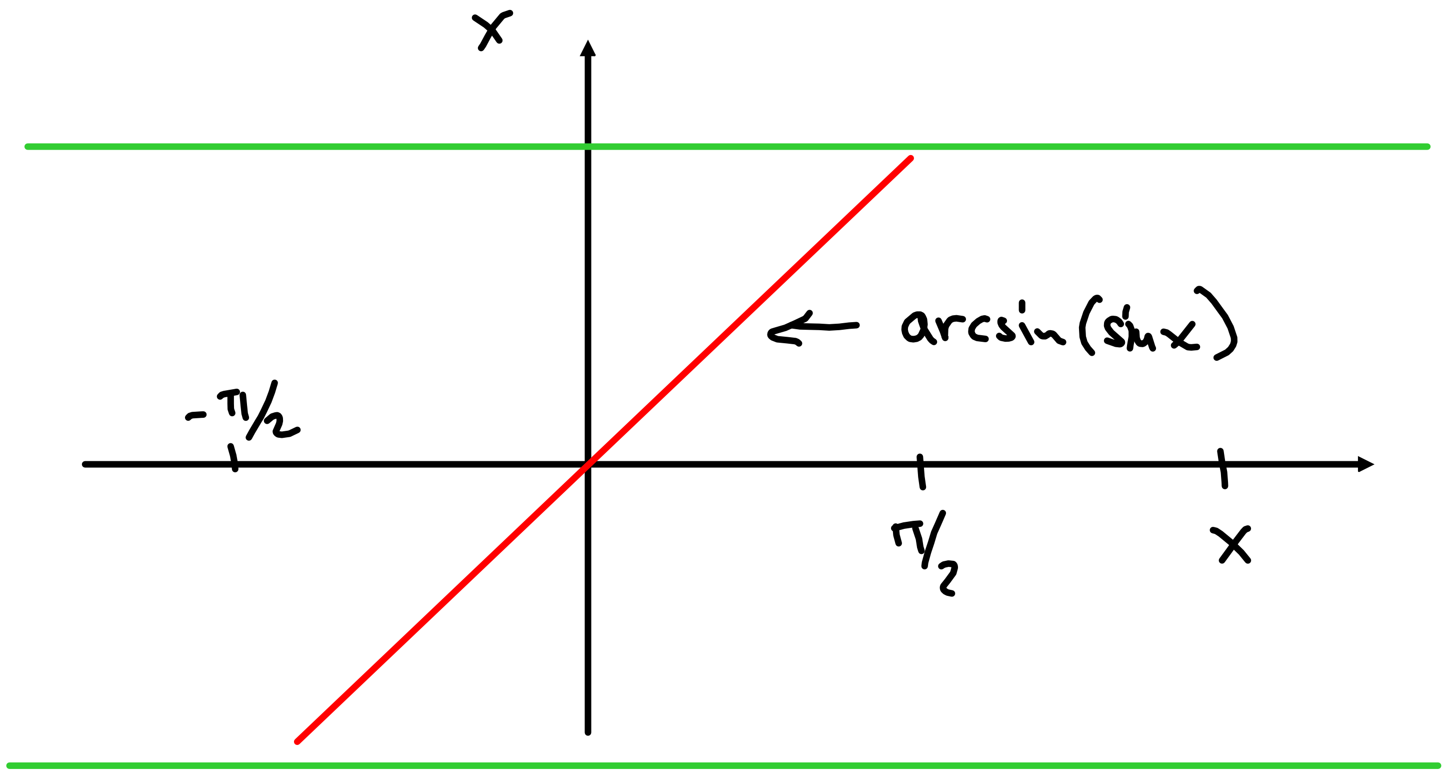
è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sin} [-1,1] \xrightarrow{\arcsin} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

se $x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ quanto vale?

non vale x sicuramente



x
arcsin(sin x)
-π/2
π/2
x

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$